

30/03/15.

Φοιτητικό #3

Άσκ (19) : Αν $\alpha, b \in \mathbb{N}$, τότε $(\alpha, b) = (\alpha+b, [\alpha, b])$ (*)

Λύση : Έστω $d = (\alpha, b)$. Τότε $d | \alpha \Rightarrow \alpha = d \cdot \alpha'$
 $d | b \Rightarrow b = d \cdot b'$

$$\kappa' (\alpha' b') = 1$$

$$d = (\alpha, b) \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z} \quad \swarrow$$

$$: d = \alpha x + b y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{d} x + \frac{b}{d} y = 1$$

$$\text{Επειδή } (\alpha, b) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \exists z, w \in \mathbb{Z} :$$

$$\alpha z + b w = 1$$

$$\text{Άρα } \left(\frac{\alpha}{d}, \frac{b}{d} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha', b') = 1$$

$$\text{Παρά: } d = (\alpha, b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists z, w \in \mathbb{Z} :$$

$$\alpha z + b w = d$$

$$\text{1}^\circ \text{ Μέλος της (*) : } (\alpha, b) = (d\alpha', db') =$$

$$= d(\alpha', b') = d \cdot 1 = d.$$

$$\text{2}^\circ \text{ Μέλος της (*) : } (\alpha+b, [\alpha, b]) =$$

$$= (d\alpha' + db', [d\alpha', db']) =$$

$$= (d(\alpha' + b'), d[\alpha', b']) =$$

$$= d(\alpha' + b', [\alpha', b']) =$$

$$\underline{\underline{d(\alpha' + b', \alpha' b')}}$$

$$(\alpha, b) \cdot [\alpha, b] = \alpha \cdot b$$

Άρα αφού $\kappa' = 1$: $(x, y) = 1 \Rightarrow (x+y, xy) = 1$.

Αν $(x+y, xy) \neq 1$ τότε ο δ θα έχει έναν

πρώτο διαιρέτη, $P \Rightarrow P | \delta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P | x+y \\ P | xy \Rightarrow P | x \wedge P | y \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P | x+y \\ \kappa' \\ P | x \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{l} P | x+y \\ P | y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P | x \\ \kappa' \\ P | y \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{l} P | y \\ \kappa' \\ P | x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$P|(x,y)=1$ $\Leftrightarrow$ α zero divisor $P: \text{πρωτος} \Rightarrow (x+y, xy)=1$

$\text{Apr} \quad (\alpha'+b', \alpha'b')=1$

α $d = \text{M.E.T.O.S. zys } (*) = 2 \stackrel{?}{=} \text{M.E.T.O.S. zys } (*)$

Ασκ Να βρεθούν 2 φυσικοί αριθμοί με: άθροισμα 798 κ' ΕΚΝ 160 με 10.780.

Λύση: Έστω $x, y \in \mathbb{N} : x+y=798$ κ' $[x, y]=10.780$
 Από την $(*)$ $\Rightarrow (x, y) = (x+y, [x, y]) = (798, 10.780)$

Πρωτογενείς Αναλύσεις: $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 = 798$
 $2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 = 10.780$

$\text{Apr} \quad (798, 10.780) = 2 \cdot 7 = 14$

Είναι: $(x, y) [x, y] = x \cdot y \Rightarrow 14 \cdot 10.780 = x \cdot y \Rightarrow \boxed{xy = 150.920}$

Όμως $\boxed{x+y=798} \Rightarrow \boxed{y=798-x}$

Τότε $x(798-x) = 150.920 \Rightarrow x^2 - 798x + 150.920 = 0$

$\Delta = 33.124$ κ' $\sqrt{\Delta} = 182$

$\text{Apr} \quad \begin{cases} x=490 \Rightarrow y=798-490=308 \\ x=308 \Rightarrow y=798-308=490 \end{cases}$

Ασκ (20): Αν $a, b, c \in \mathbb{N}$. Τότε $(a, b, c) \cdot [a, b, c] = a \cdot b \cdot c$.

κ' $[a, b, c] \cdot (a, b, c) = a \cdot b \cdot c$.

Λύση: Αν $a=b=c=1$ τότε το πρόβλημα είναι άμεσο.

Αν τουλάχιστον αν'τους $a, b, c > 1$ τότε μπορούμε να γράψουμε: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$
 $b = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0, \forall i=1, \dots, k$
 $c = p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\gamma_k}$

Είναι: $a \cdot b = p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k+\beta_k}$

$a \cdot c = p_1^{\alpha_1+\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k+\gamma_k}$

$b \cdot c = p_1^{\beta_1+\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k+\gamma_k}$

$$\text{Οπότε } [a, b, c] = P_1^{\max\{a+b, a+c, b+c\}} \dots P_k^{\max\{a_k+b_k, a_k+c_k, b_k+c_k\}}$$

$$(a, b, c) = P_1^{\min\{a, b, c\}} \dots P_k^{\min\{a_k, b_k, c_k\}}$$

Άρα το 1^ο Μέλος της συνάρτησης μπορεί να είναι:

$$P_1^{\delta_1} \dots P_k^{\delta_k}, \text{ όπου } \delta_i = \max\{a_i+b_i, a_i+c_i, b_i+c_i\} + \min\{a_i, b_i, c_i\}$$

2^ο Μέλος της συνάρτησης μπορεί να είναι:

$$P_1^{a_1+b_1+c_1} \dots P_k^{a_k+b_k+c_k}$$

$$\left. \begin{aligned} - \text{Αν } \min\{a_i, b_i, c_i\} &= a_i \text{ τότε προφανώς} \\ \max\{a_i+b_i, a_i+c_i, b_i+c_i\} &= b_i+c_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_i = a_i + b_i + c_i, \forall i=1, \dots, k.$$

$$- \text{Αν } \min\{b_i, a_i, c_i\} = b_i \Rightarrow \max\{ \} = a_i + c_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_i = a_i + b_i + c_i, \forall i=1, \dots, k.$$

$$- \min\{ \} = c_i \Rightarrow \dots \Rightarrow \delta_i = a_i + b_i + c_i, \forall i=1, \dots, k //$$

Λέκ 13: ① $b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\kappa'(b, c) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (b, c^m) = 1 = (b^m, c), \forall m \in \mathbb{N}$$

② Αν $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ με $a_i \in \mathbb{Z}$ & $a_0, a_n \neq 0$.

$$\kappa' p = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q} \text{ π.α του } f(x)$$

$$\text{με } (b, c) = 1. \text{ Τότε: } b \mid a_0 \text{ & } c \mid a_n.$$

Λέμα: ① Αν $d = (b, c^m) > 1 \Rightarrow \exists P$: πρώτος του d &

$$\text{τότε } P \mid d \Rightarrow \begin{cases} P \mid b \\ P \mid c^m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P \mid b \\ P \mid c \end{cases} \Rightarrow P \mid (b, c) = 1$$

άρα
δύο $P \geq 2$
ως πρώτος

Παρόμοια $(b^n, c) = 1$.

(2) Έστω $P = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ ρίζα του $f(x)$ όπου $(b, c) = 1$.
 με $b, c \in \mathbb{Z}$.

$$P: \text{ρίζα} \Rightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{b}{c}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \frac{b}{c} + \dots + \alpha_n \left(\frac{b}{c}\right)^n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 \frac{b}{c} + \dots + \alpha_n \frac{b^n}{c^n} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 c^n + \alpha_1 c^{n-1} b + \dots + \alpha_n b^n = 0 \quad (*)$$

$$\alpha_0 c^n = b(-\alpha_1 c^{n-1} - \dots - \alpha_n b^{n-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \mid \alpha_0 c^n \xrightarrow{(b, c^n)=1} \boxed{b \mid \alpha_0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \mid bc \\ (\alpha, b) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\alpha \mid c}$$

$$\alpha_n b^n = c(-\alpha_0 c^{n-1} - \dots - \alpha_{n-1} b^{n-1}) \Rightarrow c \mid \alpha_n b^n \xrightarrow{(b, c^n)=1} \boxed{c \mid \alpha_n}$$

└┐

Πολυάδιο (#4)

Άσκ 1: Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι a, b ώστε
 $(a, b) = 18, [a, b] = 540$.

Λύση: $18 = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} 18 \mid a \\ 18 \mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 18k \\ b = 18m \end{array}$ (όπου εννοεί)

$$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b \quad \text{Οα έχουμε } 18 \cdot 540 = 18 \cdot 18 \cdot k \cdot m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow km = 540/18 \Rightarrow \boxed{km = 30} \quad \text{Οα τα πιθανά}$$

ζεύγη (k, m) έσβ, ώστε $k \cdot m = 30$ Οα είναι:

$$(1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6), (6, 5), (10, 3), (15, 2), (30, 1)$$

Οατα βρεσαν τα a, b ...

Λεμ. ②: ① Αν α, β, γ είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι, τότε:

$$\max\{\alpha, \beta, \gamma\} = \alpha + \beta + \gamma - \min\{\alpha, \beta\} - \min\{\beta, \gamma\} - \min\{\alpha, \gamma\} + \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\textcircled{2} [\alpha, \beta, \gamma] = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot (\alpha, \beta, \gamma)}{(\alpha, \beta) \cdot (\alpha, \gamma) \cdot (\beta, \gamma)}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}.$$

Λεμ.: ① $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ $\beta \leq \alpha \leq \gamma$ $\gamma \leq \alpha \leq \beta$
 $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ $\beta \leq \gamma \leq \alpha$ $\gamma \leq \beta \leq \alpha$.

Έστω ότι $\alpha \leq \beta \leq \gamma$

Τότε: $\max\{\alpha, \beta, \gamma\} = \gamma$,

$$2^\circ \text{ μέθοδος: } \alpha + \beta + \gamma - \min\{\alpha, \beta\} - \min\{\beta, \gamma\} - \min\{\gamma, \alpha\} + \min\{\alpha, \beta, \gamma\} =$$

$$= \alpha + \beta + \gamma - \alpha - \beta - \alpha + \alpha = \gamma$$

• Παρόμοια η ~~φαινομενική~~ λογική ισχύει και για τις υπόλοιπες 5 περιπτώσεις.

② Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 1$ και μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

$$\beta = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k} \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0, \quad \forall i=1, \dots, k.$$

$$\gamma = p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\gamma_k}$$

$$1^\circ \text{ Μέθοδος: } (\alpha, \beta) \cdot (\alpha, \gamma) \cdot (\beta, \gamma) \cdot [\alpha, \beta, \gamma]$$

$$2^\circ \text{ Μέθοδος: } \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \textcircled{2}(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$(\alpha, \beta) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}$$

$$(\alpha, \gamma) = p_1^{\min\{\alpha_1, \gamma_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k, \gamma_k\}}$$

$$(\beta, \gamma) = p_1^{\min\{\beta_1, \gamma_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\min\{\beta_k, \gamma_k\}}$$

$$[\alpha, \beta, \gamma] = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\}}$$

$$1^\circ \text{ Μέθοδος: } p_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\delta_k}, \text{ όπου } \delta_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\} + \min\{\alpha_i, \gamma_i\} + \min\{\beta_i, \gamma_i\} + \max\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}$$

$$\quad \quad \quad \forall i=1, \dots, k.$$

$$\text{Είπαμε: } a \cdot b \cdot c = p_1^{a_1+b_1+c_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k+b_k+c_k}$$

$$(a, b, c) = p_1^{\min\{a_1, b_1, c_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\min\{a_k, b_k, c_k\}}$$

άρα 2° Μέλος: $p_1^{\epsilon_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\epsilon_k}$ όπου $\epsilon_i = a_i + b_i + c_i + \min\{a_i, b_i, c_i\}$
 $\forall i=1, \dots, k.$

1° Μέλος = 2° Μέλος $\Leftrightarrow \epsilon_i = \delta_i \quad \forall i=1, \dots, k$
 Το οποίο είναι αληθές από το ① //

$$[a, b, c] = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot (a, b, c)}{(a, b)(a, c)(b, c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a, b, c) [a, b, c] = a \cdot b \cdot c \cdot \frac{(a, b, c)^2}{(a, b)(a, c)(b, c)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Πα } a=6 \\ b=18 \\ c=24 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{(a \cdot b \cdot c)^2}{(a, b) \cdot (a, c) \cdot (b, c)} = \frac{1}{6}.$$

Όπως αν $(a, b) = (b, c) = (a, c) = 1$ τότε $(a, b, c) = 1.$